

ANÁLISIS DE LAS REPRESENTACIONES GEOMÉTRICAS EN LOS LIBROS DE TEXTO

Manuel Barrantes, Marco López y Manuel Ángel Fernández

La investigación analiza y clasifica las imágenes gráficas relacionadas con la enseñanza-aprendizaje de la Geometría en libros de texto. Se estudian varios aspectos de las representaciones geométricas a lo largo de las unidades de geometría de los libros. Algunos de estos aspectos son la variedad de representaciones al introducir conceptos geométricos, los elementos de las imágenes que puedan derivar en dificultades en el proceso de enseñanza-aprendizaje de la Geometría, la representación plana de figuras tridimensionales y las imágenes reales que se utilizan para aludir a elementos geométricos abstractos. Se realiza una categorización que sirve como instrumento de análisis de los textos.

Términos clave: Aprendizaje; Enseñanza; Errores; Geometría; Imágenes; Libros de texto

Analysis of Geometric Representations in Textbooks

In this research, we analyze and classify the graphical images related to the teaching-learning of geometry appearing in textbooks. It focuses on the study of several aspects of the geometrical representations included in the Geometry units of the books. Some of these aspects are the variety of representations used when introducing geometrical concepts, the elements of these figures which could lead to difficulties in the Geometry teaching-learning process, the plane representation of three-dimensional figures and the real images that are used to refer to abstract geometrical elements. We develop a categorization that serves as an instrument of text analysis.

Keywords: Errors; Geometry; Images; Learning; Teaching; Textbooks

Una de las ramas más importante de las Matemáticas, a lo largo de la historia y en la actualidad, es la Geometría. La importancia de la Geometría es indiscutible y queda justificada en la cantidad de documentos existentes, de cualquier carácter y desde hace miles de años, y en el papel que ha jugado, juega y jugará en la evolución de la sociedad. Guillén, González y Gar-

Barrantes, M., López, M. y Fernández, M. A. (2015). Análisis de las representaciones geométricas en los libros de texto. *PNA*, 9(2), 107-127.

cía (2009) recalcan que “la geometría es una disciplina que tiene gran relación y aplicación en el mundo que nos rodea cuyo estudio permite desarrollar el razonamiento lógico, la percepción espacial y la visualización” (p. 248).

Podemos afirmar sin equivocarnos que la característica más importante e inseparable de la Geometría es su componente visual. Realmente, es inconcebible estar inmerso dentro del proceso de enseñanza-aprendizaje de la Geometría sin utilizar representaciones gráficas. Es más, cuando se expone verbalmente una situación o figura geométrica siempre intentamos “dibujarla” mentalmente. Así pues, Figueiras y Deulofeu (2005) consideran que la visualización es un aspecto clave para las matemáticas, tanto en la resolución de problemas como en su efecto sobre el significado que se atribuye a la matemática.

MARCO TEÓRICO Y OBJETIVO DE LA INVESTIGACIÓN

Aunque nunca hemos defendido su uso exclusivo, el libro de texto sigue siendo un recurso ampliamente utilizado durante las etapas de escolaridad y un objeto de uso diario por parte de alumnos y profesores. Por lo tanto, siempre es necesario realizar una revisión crítica de estos para conseguir un uso eficaz encaminado a mejorar la enseñanza y el aprendizaje. Su importancia como recurso básico para el profesor viene reflejada por la cantidad de investigaciones que en torno a él se han desarrollado en los últimos años y que ponen de manifiesto la influencia de los libros de texto y manuales escolares en la actividad desarrollada en el aula, siendo gran parte de la práctica educativa determinada por estos (Azcarate y Serradó, 2006). Es habitual su utilización en el desarrollo del proceso de enseñanza y aprendizaje y, en muchas ocasiones, determina el currículo real (Monterrubio y Ortega, 2011). Este hecho hace que la elección del texto escolar sea una labor muy importante, aunque no es una tarea sencilla debido a la gran cantidad de variables que se deben tener en cuenta.

La implementación y utilización del texto escolar en el aula de matemáticas se ha producido de forma generalizada desde los inicios de la educación obligatoria hasta nuestros días. El libro de texto ha tenido diferentes papeles: (a) como objeto de estudio, como material de consulta, (b) como registro de las actividades del alumno y (c) como colección de ejercicios propuestos y problemas a resolver (González y Sierra, 2004). Además, entendemos que la legislación actual se nutre de las investigaciones previas en educación y que los libros de texto actuales se ajustan a la normativa e incorporan disposiciones didácticas de la comunidad investigadora en su organización y contenidos.

Por ello, es importante señalar que algunos errores sobre la enseñanza-aprendizaje de las conceptos geométricos pueden haber sido generados en el mismo proceso de aprendizaje de estos. Estos errores pueden ser causados por una utilización exclusiva del libro de texto y la no utilización de otros recursos o materiales que amplíen el esquema conceptual del alumno (Barrantes y Zapata, 2008).

Así pues, el objetivo principal de esta investigación es analizar las representaciones geométricas en libros de texto actuales de matemáticas de primero de educación secundaria obligatoria (ESO), utilizados en la comunidad autónoma de Extremadura, con objeto de establecer si su uso exclusivo puede dificultar el proceso de enseñanza-aprendizaje de la Geometría.

Para obtener información sobre la enseñanza-aprendizaje en una región, resulta interesante analizar libros de texto que tengan impacto en ella (Guillén et al., 2009). Así, para este

trabajo de investigación, hemos utilizado distintas editoriales señeras de nuestra comunidad mediante un estudio que nos ha permitido seleccionarlas.

Con respecto al aprendizaje de un concepto, consideramos que es importante ofrecer un repertorio de imágenes amplio y variado en el momento de introducirlo. Una escasa variedad de representaciones puede conllevar a una formación errónea de un concepto geométrico y, por lo tanto, derivar en errores y dificultades posteriores.

Tall y Vinner (1981) consideran el término concepto de imagen como la estructura cognitiva en la mente del alumno asociada a un concepto dado. Esta imagen incluye todas las imágenes mentales y propiedades y procesos asociados. El concepto de imagen puede no ser coherente y diferir bastante de la definición formal del concepto. Estos autores consideran la definición formal del concepto como el conjunto de palabras que se usan para especificar dicho concepto y que es aceptado por la comunidad matemática. Sin embargo, la definición de un concepto para los alumnos, que los autores llaman definición personal del concepto, puede variar mucho de la anterior, pues puede ser aprendida de memoria o de una forma significativa pero con un cierto grado de alejamiento o acercamiento a la definición formal. Esta definición personal genera una imagen propia del concepto que si se mejora incide positivamente en el acercamiento a la definición formal.

En este sentido, Barrantes y Zapata (2008) señalan que utilizar un único dibujo o un número reducido de dibujos provoca que el alumno construya esquemas conceptuales con imágenes estándar que suelen alejarse de la verdadera definición del concepto. Vinner y Hershkowitz (1983) consideran que deberían introducirse una variedad de ejemplos en diferentes orientaciones al presentar los conceptos geométricos. En concordancia con esto, Azcárate (1997) sostiene que un esquema conceptual no se forma a partir de las definiciones de los libros, como suponen algunos profesores y autores de textos, sino que se forma a partir de la experiencia.

El material que utilizan los alumnos, los libros, pueden incluir representaciones geométricas estereotipadas, es decir, que repiten ciertos patrones o que presenten algunos elementos en las representaciones que inducen a que se les atribuyan propiedades inexistentes o se formen conceptos erróneos acerca de las mismas (Gutiérrez y Jaime, 1996). Lo mismo ocurre con las representaciones planas de figuras tridimensionales, que pueden ser interpretadas de forma errónea por los alumnos ya que el paso del espacio al plano admite varias posibilidades y estos pueden tener falta de dominio de los sistemas de representación.

Para realizar el análisis de las imágenes de los libros, tomamos como referencia a Vinner y Hershkowitz (1983), quienes introducen los distractores de orientación y estructuración. Los distractores de orientación son propiedades visuales que se incluyen en el esquema conceptual del alumno y que no tienen nada que ver con la definición del concepto. Quizá, la característica más relevante de los distractores de orientación es el paralelismo con los bordes del libro de texto, por ejemplo, al representar rectas paralelas y perpendiculares o alturas de triángulos. Por otro lado, los distractores de estructuración son representaciones de un concepto en el que ciertas propiedades y elementos son excluidos, en principio, sin intencionalidad. Un ejemplo de este tipo de distractor es la presentación de las definiciones de polígonos y poliedros con figuras siempre convexas y escasas o nulas figuras cóncavas.

Distintos autores como Azcárate (1997) observaron cómo diferentes grupos de alumnos confunden verticalidad y perpendicularidad al trazar las alturas de triángulos situados en posición no estándar. También, Moriena y Scaglia (2003) detectaron que los alumnos presentan dificultades para identificar figuras geométricas si estas difieren de las representaciones habi-

tuales o estereotipos presentes en los libros de texto. Estos alumnos consideran, por ejemplo, que la representación gráfica estereotipada del cuadrado y del rectángulo se caracteriza porque los lados son paralelos a las líneas horizontal y vertical, y la de la pirámide se caracteriza porque la base se apoya sobre el plano horizontal. Estos autores consideran que es necesario que los alumnos apliquen sus conocimientos conceptuales de las figuras geométricas sobre dibujos no estereotipados de estas.

Además, la propia experiencia y los ejemplos que se han visto o utilizado, tanto en el contexto escolar como extraescolarmente, juegan un papel básico en la formación de la imagen de un concepto que tiene una persona. Con frecuencia, estos ejemplos son pocos y con alguna característica visual peculiar, convirtiéndose en prototipos y en los únicos casos de referencia con los que el estudiante puede comparar casos nuevos (Gutiérrez y Jaime, 1996).

Consideramos imprescindible relacionar la geometría abstracta con elementos de la vida real y, por ello, creemos que esta transformación ha de hacerse de la mejor manera posible. El profesorado debe observar qué imágenes reales (fotografías, dibujos de objetos cotidianos, etc.) presentan los libros como representación de figuras abstractas o conceptos geométricos y discutir sobre si son apropiadas, si pueden ocasionar algunas confusiones, si podemos considerarlas inadecuadas, etc. Para ello, tenemos en cuenta a Fischbein (1993), quien distingue una doble naturaleza de caracteres figurales y conceptuales en las figuras geométricas. Por ejemplo, este autor afirma que una esfera geométrica desde el punto de vista conceptual es un concepto abstracto, que además tiene propiedades características de la figuras, como una forma, posición o magnitud determinada. Hay una doble simbiosis entre concepto y figura. Por una parte, la componente de imagen y, por otra, las restricciones lógicas conceptuales que controlan el rigor formal del proceso. Fischbein (1993) afirma que la perfección absoluta de una esfera geométrica no se puede encontrar en la realidad. En este sentido, Barrantes y Zapata (2008) afirman que:

A la complicación que supone el separar el objeto abstracto del real se añade otras veces la presentación en los libros de textos de fotografías que no son muy adecuadas para una primera presentación del sólido correspondiente. Así observamos caramelos de palo, además con superficie rugosa e irregular, como ejemplo de esfera; botes de bebidas con extremos curvados como ejemplos de cilindros, o jabones con formas redondeadas y con huecos como ejemplos de prismas. Un ejemplo también poco cercano al niño es presentar como primera pirámide una fotografía de las pirámides de Egipto que no estén en planos principales y que no pueden formar una imagen mental adecuada al concepto. (p. 63)

METODOLOGÍA

El primer proceso importante para este estudio es el análisis previo de los libros de texto, ya que representa una primera toma de contacto con el material que será objeto de análisis. Este proceso se realiza en dos fases: (a) primer contacto y (b) selección de la muestra definitiva. El primer contacto es importante para observar si el estudio tiene realmente interés, en concordancia con lo que esperamos conseguir. Sirve además para evaluar la posible carga de trabajo a realizar y delimitar así el número de libros de texto y las categorías de análisis. La primera fase es útil, en definitiva, para centrar el trabajo. En el desarrollo de esta primera fase se revisaron algunos libros de texto de otras editoriales distintas a las que tratamos definitivamente

en esta investigación. La segunda fase de este proceso es útil principalmente para realizar la selección definitiva de la muestra de libros de texto y para ir perfilando las categorías establecidas.

Clasificación del estudio

Dado que el objetivo de la investigación es un análisis del libro de texto como un objeto concreto, consideramos que este estudio se enmarca dentro de las investigaciones descriptivas (Miles y Huberman, 1984). Puesto que los libros de texto son todos del mismo curso y han sido editados en un mismo paradigma educativo-normativo, consideramos que es un estudio transversal.

Para analizar los libros de texto, empleamos métodos cuantitativos y cualitativos. Consideramos que, en algunos casos, la información cuantitativa no cubre todas las necesidades que requiere el objeto de análisis y es preciso aportar informaciones cualitativas. En otras situaciones, simplemente la naturaleza del objeto de estudio nos insta a describir con palabras las observaciones realizadas.

En su clasificación de la investigación en Educación Matemática, Llinares (2008) considera al análisis de libros textos como una agenda de investigación en sí misma. Este estudio puede enmarcarse dentro del grupo de investigaciones de dicha agenda como un trabajo sobre la estructura y organización de contenidos, atendiendo al caso concreto de cómo se organizan las representaciones geométricas en los libros de texto.

En cuanto al marco de análisis de libros de texto, Van Dormolen (1986) diferencia entre análisis a priori, a posteriori y a tempo. Esta investigación es un análisis de los libros de textos a priori, es decir, como medio de instrucción. La figura 1 resume la clasificación aquí descrita.

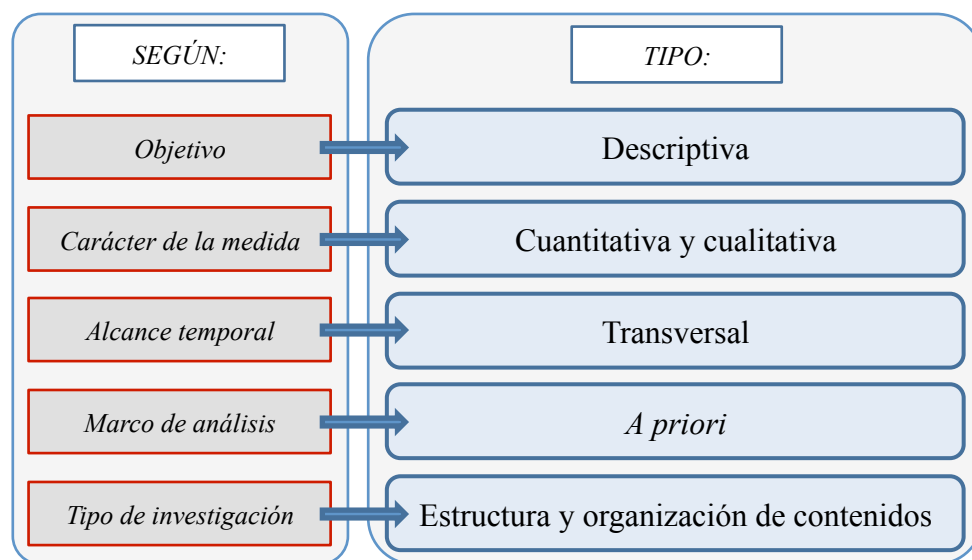


Figura 1. Clasificación de la investigación

Población y selección de la muestra

Consideramos como población los libros de texto utilizados actualmente en la Comunidad Autónoma de Extremadura para la materia de matemáticas. Para llevar a cabo el análisis, seleccionamos una muestra de forma intencional con base en unos criterios determinados y si-

guiendo un proceso concreto. La muestra tomada en este trabajo se corresponde con tres libros de texto de primero de ESO de tres editoriales distintas presentes en Extremadura. Para la selección de los libros, tomamos dos criterios: (a) la representatividad y (b) la actualidad.

Los libros de texto han de tener impacto dentro de la comunidad autónoma de Extremadura. Por ello, en primer lugar identificamos las editoriales utilizadas en la región, así como el grado de uso de las mismas. Una vez obtenidos los datos pertinentes, seleccionamos las editoriales con mayor grado de uso. No obstante, también consideramos alguna editorial con menor volumen de uso, dado que entendemos que es posible que las editoriales de mayor impacto sean también las que mayor parecido presenten. Seleccionamos libros de texto actuales, entendiendo por actuales aquellos editados con posterioridad al currículum vigente.

Para obtener los datos sobre utilización de los libros consideramos todos los centros privados, concertados y públicos que imparten enseñanzas correspondientes a la etapa de la ESO de las ciudades más pobladas de la región (Badajoz, Cáceres y Mérida). A partir de la Guía de Servicios Educativos de Extremadura 2012-2013 (Consejería de Educación del Gobierno de Extremadura, 2012), obtuvimos una relación de la muestra de centros así como las direcciones de correo electrónico. Completamos los datos a partir de la información publicada en la página web de cada uno de los centros. Antes de realizar la selección definitiva, realizamos una selección previa de cuatro editoriales: las tres de mayor impacto y una de las de menor impacto que consideramos seña por adaptarse a las tendencias actuales del constructivismo. Los textos concretos seleccionados fueron los siguientes: Colera y Gaztelu (2011), García y Pérez (2007), Vizmanos, Anzola, Mansilla y Bujanda (2010) y Uriondo (2007).

Realizamos un estudio previo de estos cuatro libros de texto, uno por editorial, con base en algunas de las categorías de análisis propuestas. Por último, seleccionamos las tres editoriales para el estudio atendiendo a la representatividad y a las distintas tendencias. La editorial eliminada, Oxford University Press (Uriondo, 2007), presenta una línea similar a una de las elegidas. La figura 2 recoge los pasos seguidos.

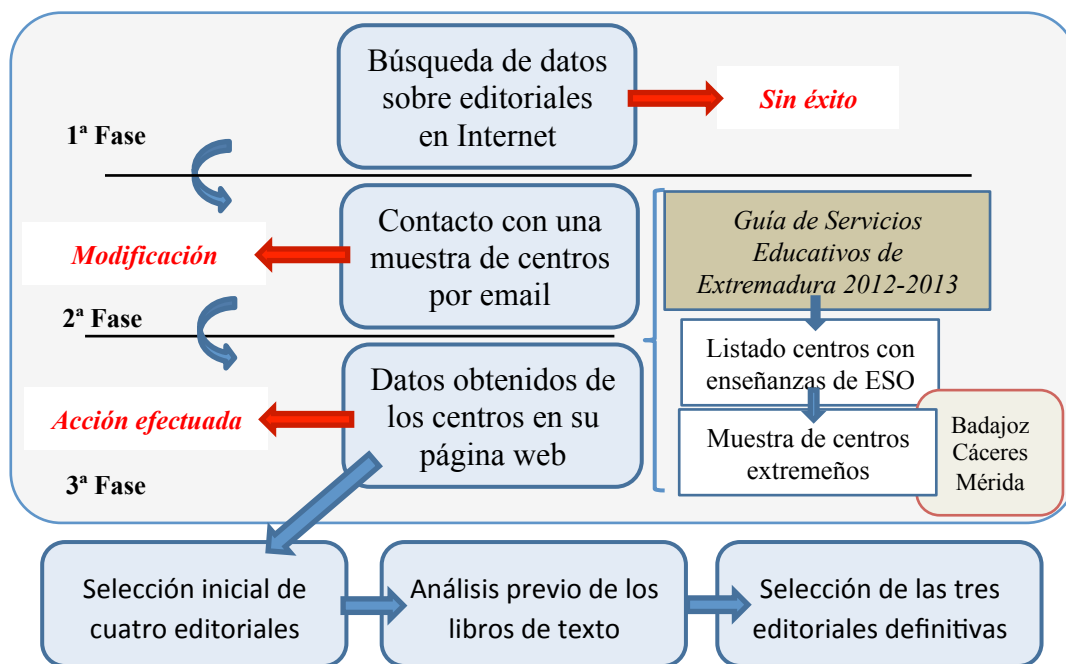


Figura 2. Metodología para la selección de editoriales en Extremadura

Categorías de análisis

La construcción de las categorías de análisis es un proceso complejo que se sustenta en la revisión bibliográfica realizada así como en las metas de la investigación. Durante el análisis de los textos, dichas categorías sufrieron cambios. Para el análisis de las representaciones geométricas de los libros, establecemos unas categorías determinadas. Nuestro instrumento de análisis lo conformarán dichas categorías, junto con los elementos adecuados para estudiar cada una de las mismas: descripción, criterios, subcategorías, tablas y gráficos para la recogida y exposición de los datos, etc.

Barrantes y Zapata (2008) distinguen varios elementos que pueden causar obstáculos y errores en la enseñanza-aprendizaje de los conceptos geométricos. Para este trabajo, consideramos los relacionados con la visualización en Geometría, es decir, distractores de orientación y de estructuración e imágenes reales de conceptos.

En los diferentes modelos de análisis y valoración de textos escolares de matemáticas presentados por Monterrubio (2007) y Monterrubio y Ortega (2011), las ilustraciones son uno de los organizadores. Algunos de los indicadores de análisis sobre ilustraciones que establecen dichos autores son pertinentes para nuestra investigación, en concreto: (a) cantidad de ilustraciones; (b) adecuación de las ilustraciones a los alumnos, a los objetivos, a los contenidos y al contexto; y (c) claridad de las figuras, de los elementos en las figuras planas, de las figuras tridimensionales, de las secciones planas y de los elementos de las figuras tridimensionales.

En la tabla 1 se recogen las cinco categorías de análisis a las que llegamos finalmente y su codificación.

Tabla 1

Categorías para el análisis de los libros de texto

Categoría	Código
Presentación de las figuras y conceptos geométricos	PFC
Representación plano de figuras tridimensionales	RFT
Distractores de orientación	DO
Distractores de estructuración	DE
Imágenes reales de figuras y conceptos geométricos	IRC

Aparte de las categorías de análisis, consideramos importante estudiar algunos datos generales en cuanto a la organización para cada libro de texto. Nos fijamos en los contenidos del libro, cómo se organizan las unidades, cuáles son las unidades de geometría sujetas al análisis y cuánto espacio del texto dedican los libros a la geometría. En el análisis global, también se comparan estos datos sobre organización entre las editoriales, para poner de manifiesto sus similitudes y diferencias.

A continuación comentamos cada una de las categorías.

Categoría 1. Presentación de las figuras asociadas a conceptos geométricos (PFC)

Esta categoría recoge el número de representaciones distintas utilizadas al introducir un concepto. Nos interesa analizar qué conceptos se presentan en cada unidad de geometría y cuántos dibujos distintos se utilizan en el momento de la presentación para cada libro de texto.

Consideramos como momento de la presentación a la exposición teórica de contenidos del texto analizado. A veces, aunque se puedan representar varios dibujos, estos son esencialmente iguales y, en tal caso, solo contabilizamos uno. Consideramos que dos representaciones son iguales si presentan características similares. Presentamos dos ejemplos a continuación.

- ◆ Si se presentan dos dibujos al introducir el concepto de ángulo y ambos son ángulos apoyados sobre un lado horizontal y con una abertura similar se consideran iguales. Para considerarlos distintos tendrían que presentar orientaciones o aberturas diferentes.
- ◆ Si se presentan dos triángulos rectángulos para introducir el concepto y ambos se apoyan siempre sobre los catetos se consideraran iguales. Para considerarlos distintos tendrían que apoyarse sobre la hipotenusa o presentar otras orientaciones diferentes.

Además, en el caso de conceptos como recta, ángulo, polígono, circunferencia, etc. contabilizamos las representaciones que están referidas únicamente a estos elementos, sin otras connotaciones. No obstante, entendemos que cuando se presentan conceptos, como, por ejemplo, rectas secantes o ángulos obtusos, también se están dibujando rectas o ángulos, aunque los contabilizamos por separado.

Calculamos, para cada tema, la media del número de representaciones. Utilizamos esta media para la comparación entre editoriales. No obstante, precisamos más detalles acerca de la distribución del número de representaciones pues, aunque dos medias sean iguales, la distribución del número de representaciones no tiene por qué asemejarse.

Categoría 2. Representación plana de figuras tridimensionales (RFT)

Dentro de esta categoría, son objeto de estudio todas las representaciones expuestas en los libros de texto de figuras tridimensionales.



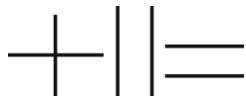
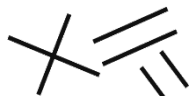

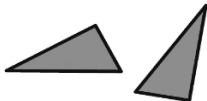
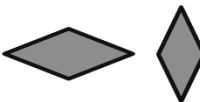


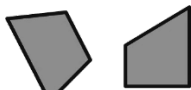




Dividimos el análisis de las figuras tridimensionales en dos partes. Por un lado, estudiamos todas las representaciones planas de elementos tridimensionales que se recogen en las unidades o temas relativos a conceptos en el plano. Tratamos de observar cómo son estas representaciones y analizamos si estas situaciones pueden ser o no difíciles de interpretar para los alumnos. Por otra parte, nos centramos en observar qué sistemas de representación (perspectivas cónicas y axonométricas ortogonales y oblicuas) se utilizan en las unidades sobre cuerpos geométricos y volúmenes. Nos interesa ver qué perspectivas son las más utilizadas en cada libro de texto y si existe algún tipo de relación entre el tipo de cuerpo geométrico y el sistema de representación utilizado.

Para la comparativa de las editoriales, recogemos la relación entre el tipo de cuerpo geométrico y la perspectiva utilizada (ver tabla 6).

Categoría 3. Distractores de orientación (DO)

En esta categoría consideramos la presencia de los distractores de orientación en los libros. Según el marco teórico, estos elementos podemos definirlos como propiedades visuales que se incluyen en el esquema conceptual del alumno y que no tienen nada que ver con la definición del concepto. Dentro de esta categoría incluimos siete subcategorías de análisis, una por cada distractor de orientación considerado como podemos ver en la tabla 2.

Tabla 2
Distractores de orientación

Código	Subcategoría	Figuras	
		<i>Estereotipos</i>	<i>No estereotipos</i>
DO-alh	Ángulos apoyados sobre un lado horizontal		
DO-rpp	Rectas paralelas y perpendiculares que son horizontales y verticales		
DO-tra	Triángulos rectángulos apoyados sobre los catetos		
DO-rav	Rombos apoyados sobre un vértice		
DO-tap	Trapecios apoyados en uno de los lados paralelos		
DO-sab	Sólidos apoyados sobre la base		
DO-pal	Polígonos apoyados sobre un lado horizontal		

En cada subcategoría, consideramos todas las figuras y representaciones geométricas pertinentes, dividiéndolas en dos grupos: (a) las que presentan el distractor de orientación (figuras estereotipadas o en posición estándar) y (b) las que no lo presentan (figuras no estereotipadas o en posición no estándar).

Además, establecemos dos momentos distintos para este estudio: teórico (partes del texto de presentación de los contenidos junto con ejemplos, ejercicios resueltos y resúmenes) y práctico (ejercicio, problemas y actividades propuestas a los alumnos a lo largo del texto). Consideramos esta distinción de momentos para observar si hay diferencias en las figuras representadas en función del objetivo del texto: exponer un elemento geométrico o proponer que el alumno trabaje con él. Entendemos que debería existir cierta coherencia en este sentido: si al presentar una figura se utiliza solo una representación y, además, en posición estándar, quizá el alumno tenga dificultades en las actividades en las que se presenta la figura en posición no estándar (Dickson, Brown y Gibson, 1991).

Para cada libro y subcategoría, recogimos el número de figuras totales analizadas en tablas, las consideradas estereotipos y no estereotipos, y el cálculo del porcentaje de figuras estereotipos sobre el total. En cada tabla distinguimos tres bloques: (a) parte teórica, (b) parte práctica y (c) general. La información que aportan las tablas se complementa con detalles del análisis de las subcategorías en los libros de texto.





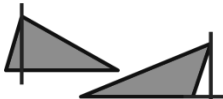
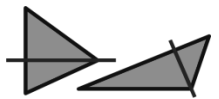


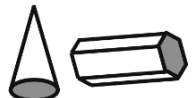
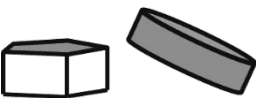
Categoría 4. Distractores de estructuración (DE)

En esta categoría consideramos la presencia de los distractores de estructuración en los libros. Recordemos que, según el marco teórico, podemos definir estos elementos como representaciones de un concepto en el que ciertas propiedades y elementos son excluidos, en principio, sin intencionalidad.

Dentro de esta categoría incluimos cinco subcategorías de análisis, una por cada distractor de estructuración considerado (ver tabla 3).

Tabla 3

Distractores de estructuración

Código	Subcategoría	Figuras	
		Estereotipos	No estereotipos
DE-til	Triángulos isósceles con los lados iguales mayores que el desigual		
DE-amc	Alturas y mediatrices que se cortan en un punto interior		
DE-uav	Triángulos con una única altura vertical		
DE-fpc	Figuras planas convexas		
DE-amb	Sólidos con la altura mayor que el ancho de la base		

Para cada subcategoría, estudiamos todas las figuras y representaciones geométricas pertinentes, dividiéndolas en dos grupos: las que presentan el distractor de estructuración y las que no lo presentan. De la misma forma, establecemos dos momentos distintos para este estudio: (a) teórico y (b) práctico. Los procesos de recogida y el análisis de los datos también son similares a la categoría anterior.

Categoría 5. Imágenes reales de figuras y conceptos geométricos

Dentro de esta categoría son objeto de estudio todas las representaciones reales (fotografías y dibujos) de figuras o conceptos geométricos. Tenemos en cuenta cuántas imágenes reales incluyen los libros de texto. Para cada imagen, discutimos si es apropiada, si puede ocasionar confusiones o si podemos considerarla inadecuada.

En cada texto se analizan todas las figuras pertinentes, dividiendo el estudio en cada uno de los temas de geometría del libro. Para el análisis global de la categoría, se expone una tabla con el número de imágenes reales en cada una de las editoriales aunque, en este caso, son más importantes los comentarios en detalle sobre las imágenes analizadas y recogidos en el análisis por editorial.

RESULTADOS

Primeramente analizamos por separado, de forma exhaustiva y para cada categoría de análisis, el libro de la editorial seleccionada, asignando un código a cada editorial. SM se corresponde con el código E1, Anaya con E2 y Santillana con E3. Una vez efectuado este proceso, pasamos a analizar de forma global cada categoría de análisis confrontando los datos de los tres libros de texto. En este apartado exponemos los resultados del análisis global, comenzando por la organización y siguiendo por las categorías.

Organización de las unidades

En general, los libros tienen una organización similar de las unidades. Una o dos páginas introductorias, exposición de contenidos junto a ejemplos y actividades, breve resumen de los contenidos vistos (dos de ellos) y una relación de actividades finales. En uno de ellos se recoge, además, algunas actividades sobre geometría con Geogebra.

Las distintas editoriales presentan algunas diferencias en cuanto a los contenidos que se exponen y el momento en el que lo hacen. No obstante se pueden ver unas líneas generales de coincidencias en cuanto a la organización de los contenidos en cuatro bloques más o menos definidos: elementos geométricos (rectas y ángulos), figuras planas, áreas y perímetros, y cuerpos geométricos. Aunque el último bloque figura en todas las editoriales, el estudio de los cuerpos geométricos no forma parte del Currículo de Matemáticas de primero de ESO para la comunidad autónoma de Extremadura.

En cuanto a la situación de las unidades de geometría dentro de los libros de texto, observamos que se sitúan hacia el final del libro. En el texto de la editorial E1 son las últimas cuatro unidades del libro y en las otras editoriales, solo vienen sucedidas de las unidades sobre estadística y probabilidad. En lo que se refiere a la importancia de la geometría en contenidos, vemos que oscila entre una quinta parte y un tercio sobre el total de los contenidos, dependiendo de la editorial.

Teniendo como base los objetivos establecidos en la investigación y las distintas categorías obtenemos los siguientes resultados.

Representaciones

Los libros de texto exponen una variedad escasa de representaciones en el momento de presentar las figuras y conceptos geométricos. La tendencia general entre los libros de texto estudiados, como se ha cerciorado en la categoría de presentación de figuras y conceptos (PFC), es que la mayoría de los conceptos se presentan mediante una única representación. Hay que señalar que hemos encontrado algunos casos en lo que se definen elementos geométricos sin ningún apoyo visual. Por ejemplo, en la Unidad 13 de E1, durante el desarrollo de los contenidos, no se representan la longitud de un arco, la longitud de una circunferencia y el área del cuadrado, en el momento de su exposición. Sin embargo, sí se realiza un apoyo visual para estos conceptos en el resumen final del tema. Como se aprecia en la tabla 4, en la Unidad 14, todos los conceptos tienen también, a lo sumo, una única figura como apoyo visual, menos el prisma regular, paralelepípedo y pirámide regular que se presentan sin dicho apoyo.

Tabla 4

Análisis de la categoría PFC (E1, unidad 14)

Figura/Concepto	Número de representaciones distintas	Figura/Concepto	Número de representaciones distintas
Poliedro	1	Pirámide recta	1
Elementos de un poliedro	1	Pirámide oblicua	1
Poliedro convexo	1	Pirámide regular	0
Poliedro cóncavo	1	Cilindro	1
Tetraedro	1	Cono	1
Cubo	1	Esfera	1
Octaedro	1	Casquete esférico	1
Dodecaedro	1	Semiesfera	1
Icosaedro	1	Volumen del ortoedro	1
Prisma	1	Volumen de un cubo	1
Prisma recto	1	Volumen de un prisma	1
Prisma oblicuo	1	Volumen de una pirámide	1
Prisma regular	0	Volumen del cilindro	1
Paralelepípedo	0	Volumen del cono	1
Pirámide	1	MEDIA	0,90

En la tabla 5 se recoge la media de representaciones para las distintas editoriales y las diferentes unidades temáticas de los textos.

Tabla 5

Número medio de representaciones distintas al presentar figuras y conceptos

Editorial	Elementos geométricos	Figuras planas	Áreas y perímetros	Cuerpos geométricos
E1	1,28	1,04	1,28	0,90
E2	1,80	1,91	1,67	1,91
E3	1,81	1,92	1,71	1,10

Se puede apreciar que las editoriales E2 y E3 utilizan, en media, un número mayor de representaciones distintas para presentar los conceptos y figuras geométricas que E1. No obstante, en ambos casos son diferentes. En E2, la mayor parte de los elementos tienen una única representación y algunos conceptos concretos como cuerpos geométricos tienen un número

muy elevado de representaciones. Sin embargo, E3 es más equilibrada en este sentido: aproximadamente la mitad de los elementos tiene una representación y el resto se reparten entre dos o más representaciones.

Según la división de contenidos considerada para los libros de texto, se puede ver cómo los conceptos que menor número de representaciones presenta es la de cuerpos geométricos. En los casos de E1 y E3 este hecho es muy evidente. Aunque en el caso de E2 la media para esta parte es elevada (1,91), también es en la que más contraste se presenta, ya que los conceptos de cuerpo geométrico y cuerpo de revolución cuentan con 10 y 7 representaciones, respectivamente; y el resto tienen solo una representación.

En las unidades relativas a elementos geométricos, figuras planas y áreas y perímetros, solo hemos encontrado dos imágenes en la que se representen situaciones tridimensionales, una en E1 y otra en E3. Ambas imágenes se corresponden con una situación similar —una escalera, un muro y el suelo forman un triángulo rectángulo—, y aplicando el teorema de Pitágoras hay que obtener uno de los datos que faltan.

Representaciones planas de sólidos

Existe una correlación fuerte y directa entre el tipo de sólido y la perspectiva utilizada en su representación plana. En la parte de los libros dedicada a cuerpos geométricos hay diversas representaciones de figuras tridimensionales. Al observar estas representaciones, hemos podido constatar que hay predilección por representar los sólidos en perspectiva axonométrica. Se utilizan los tipos de perspectivas axonométricas ortogonales (trimétrica, dimétrica e isométrica) y perspectiva axonométrica oblicua (caballera). Solo en un caso encontramos alguna representación en perspectiva cónica, de forma anecdótica. Consideramos entonces que los alumnos que utilicen estos textos han de familiarizarse con este tipo de sistemas de representación de figuras tridimensionales.

En la tabla 6 recogemos la relación entre el tipo de sólido y la perspectiva utilizada, distinguiendo cada editorial.

Tabla 6

Tipos de perspectivas utilizadas para los cuerpos geométricos

Editorial	Tipo de cuerpo geométrico	Tipo de perspectiva			
		Isométrica	Dimétrica	Trimétrica	Caballera
E1	Prismas y pirámides de base no cuadrangular	X			
	Cuerpos de revolución		X		
	Ortoedros y poliedros de caras cuadrangulares (no prismas)	X			X
E2	Prismas y pirámides de base no cuadrangular	X			
	Cuerpos de revolución		X		
	Ortoedros y poliedros de caras cuadrangulares	X		X	X

Tabla 6

Tipos de perspectivas utilizadas para los cuerpos geométricos

Editorial	Tipo de cuerpo geométrico (no prismas)	Tipo de perspectiva			
		Isométrica	Dimétrica	Trimétrica	Caballera
E3	Prismas y pirámides de base no cuadrangular	X			
	Cuerpos de revolución		X		
	Ortoedros y poliedros de caras cuadrangulares (no prismas)				X

En los tres libros analizados, todos los prismas y pirámides de base no cuadrangular se presentan en perspectiva isométrica y todos los cuerpos de revolución en perspectiva dimétrica.

En el caso de los ortoedros y poliedros donde abundan caras cuadrangulares (no prismas) existe cierta variabilidad, aunque la perspectiva caballera es el denominador común en las tres editoriales.

Presencia de estereotipos

La mayoría de las representaciones geométricas contempladas en los libros de texto son estereotipos: se presentan en posiciones y orientaciones estándar (distractores de orientación) y con atributos y propiedades estándar (distractores de estructuración). De forma general, la presencia de distractores de orientación (DO) es muy marcada en los libros de texto estudiados. Comprobamos que el número de figuras estereotipadas es siempre superior al de no estereotipadas en todas las subcategorías de DO. Además estos valores, en términos porcentuales, no sufren grandes cambios al pasar de la parte de exposición teórica de los textos a la parte de ejercicios y actividades prácticas, siendo, en general, algo inferiores en esta última parte. Aunque la tendencia general es clara, hemos encontrado diferencias entre las tres editoriales en función de la subcategoría de DO analizada. Por ejemplo, resaltamos en la subcategoría DO-alh (Ángulos apoyados sobre un lado horizontal) las diferencias significativas que se observan entre las tres editoriales (ver figura 3).

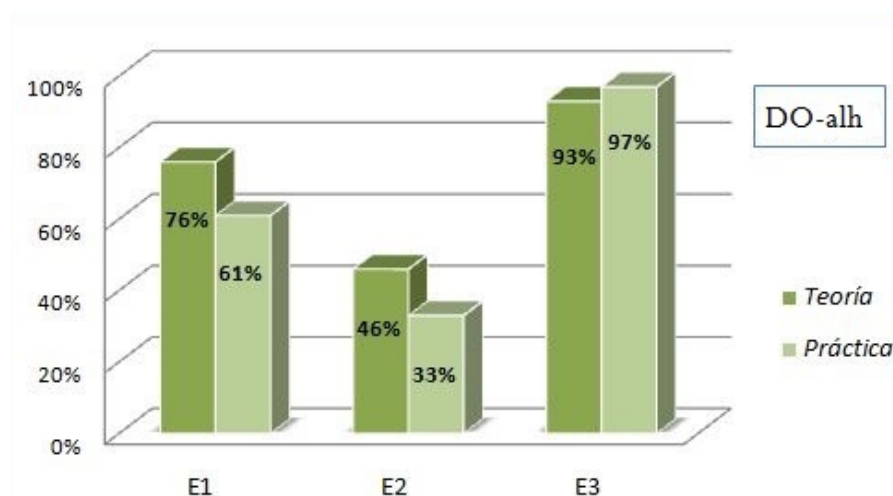


Figura 3. Análisis conjunto de la subcategoría Ángulos apoyados sobre un lado horizontal (DO-alh)

En la figura 3 se observa que E2 presenta la mayor parte de figuras con ángulos de forma no estándar. E1 tiene unos porcentajes relativamente elevados, aunque hay bastantes figuras no estereotipadas en números absolutos. Por el contrario, E3 presenta prácticamente todas las figuras con ángulos apoyados sobre un lado horizontal. Al pasar de la teoría a la práctica, tanto E1 como E2 experimentan una ligera bajada del ratio de figuras estereotipos. En general observamos lo siguiente.

- ◆ Las figuras con ángulos se orientan de forma que estos se apoyan, la mayor parte de las veces, sobre lados horizontales.
- ◆ Las rectas perpendiculares se dibujan siempre paralelas a los bordes del libro de texto y las rectas paralelas se exponen en diversos tipos de posiciones.
- ◆ Los rombos se representan apoyados sobre un vértice, siendo sus diagonales paralelas a los márgenes del libro.
- ◆ Los trapecios se apoyan sobre uno de sus lados paralelos.
- ◆ La mayoría de los polígonos se apoyan sobre un lado horizontal.
- ◆ La mayor parte de los prismas, pirámides, conos y cilindros se apoyan sobre la base y los demás sólidos se apoyan sobre una de sus caras planas.

En el caso de los distractores de estructuración (DE), resaltamos las diferencias existentes entre los dos momentos estudiados: hay porcentajes muy elevados de estereotipos en la parte de exposición teórica que en muchos casos se reducen significativamente en la parte práctica. Hay grandes diferencias entre editoriales en todas las subcategorías de DE analizadas, con lo que no es fácil establecer sentencias generales acerca de cada distractor analizado. En cualquier caso, podemos apreciar lo siguiente.

- ◆ Los triángulos isósceles se dibujan con los lados iguales mayor que el lado de desigual en dos de los libros.
- ◆ El punto de corte de las alturas y las mediatrices de un triángulo se produce en el interior del mismo.

- ◆ En el caso de triángulos que se representan con una única altura. Esta altura es vertical. Además, si no se refieren al caso explícito de corte de alturas, todos los demás triángulos donde se exponen alturas, ésta es única.
- ◆ La mayoría de los polígonos dibujados son convexos en la parte de teoría y en la práctica hay un número similar de polígonos cóncavos y convexos.
- ◆ Los sólidos representados en los textos siempre son convexos. Aunque a veces se presentan excepciones como la definición visual de figura geométrica de E2 en la que aparecen un número suficiente de figuras cóncavas y convexas y además en distintas posiciones de orientación.
- ◆ Los conos, cilindros, pirámides y prismas se representan, en general, con un ancho de base menor que la longitud de la altura.

Imágenes y dibujos reales

En el análisis de la categoría imágenes reales de figuras y conceptos (IRC), para cada editorial, atendemos a las imágenes reales que contienen los libros de texto en cada una de las unidades y comentamos algunas consideraciones sobre estas.

Las imágenes y dibujos reales utilizados en los libros de texto sobre objetos y situaciones geométricas son escasas, aunque las que aparecen suelen ser adecuadas a las figuras o conceptos que aluden, a excepción de algunos casos concretos. Por ejemplo, en E3, el tema 10 de polígonos y circunferencias, casi no hay imágenes o dibujos en referencia a la realidad. Durante la parte de exposición de contenido únicamente hay una imagen en una actividad, en la que se propone identificar los elementos de una circunferencia en una rueda de un carro. Los elementos a los que se alude son el centro, radios y diámetro pero se observa que en esta rueda existe otra circunferencia pequeña, circunferencia central, y por tanto los palos que unen la circunferencia interior con la exterior no son exactamente radios ni diámetros, con lo que el ejemplo podría llevar al alumno a una mala concepción de los conceptos expuestos.

Podemos observar diferencias entre las tres editoriales en cuanto al número de representaciones de este tipo que se incluyen en los textos y también en la distribución de estas en función de la unidad estudiada (ver tabla 7). Así pues, E1 es la que más ilustraciones de este tipo incorpora y E2 la que menos. Además, se observa que se utilizan más imágenes de este tipo en las unidades de figuras planas y de cuerpos geométricos que en las de elementos geométricos y de áreas y perímetros.

Tabla 7
Número de imágenes reales

Editorial	Elementos geométricos	Figuras planas	Áreas y perímetros	Cuerpos geométricos
E1	5	6	5	12
E2	1	4	0	1
E3	2	6	3	4

CONCLUSIONES

Como conclusión final, existen coincidencias y diferencias entre las editoriales analizadas en función del aspecto o categoría analizada. Así, se pueden ver coincidencias en cuanto a la organización de los contenidos en cuatro bloques, como presentamos en el apartado de resultados.

Los conceptos y figuras geométricas se introducen utilizando pocas representaciones en las tres editoriales. Además, estas representaciones no son muy variadas, siendo en la mayor parte de los casos estereotipos con características de orientación y propiedades estándar. Por ejemplo, todos los triángulos rectángulos y una gran mayoría de los trapecios presentados por las tres editoriales se representan de forma estándar a lo largo de todas las unidades de geometría. Este resultado conecta con las observaciones de Moriena y Scaglia (2003) sobre las dificultades de los alumnos al identificar figuras geométricas no estándar. Aparentemente, no está fallando el conocimiento de la componente conceptual de la figura sino una mayor influencia de la componente figural.

Igualmente, las editoriales coinciden en presentar la altura del triángulo como única y de forma vertical (paralela a los márgenes derecho e izquierdo del libro). También hay pocas representaciones de corte de las tres alturas o las tres mediatrices y, de forma general, este corte siempre se produce en el interior del triángulo. Esta escasez concuerda con el hecho de que, según Azcárate (1997), los alumnos tienden a confundir verticalidad y perpendicularidad al trazar las alturas de triángulos situados en posición no estándar.

En los tres libros analizados, casi todos los cuerpos geométricos aparecen con la base de menor longitud que la altura del sólido. También tienen pocas imágenes o dibujos reales referidos a conceptos o figuras geométricas. Destaca E1 como la editorial que más ilustraciones de este tipo incorpora. Sin embargo, hay bastantes polígonos representados sin apoyarse sobre uno de sus lados, aunque siempre en menor número que los representados de forma estándar.

Hay pocas diferencias significativas que destacar. Por ejemplo, en la representación de ángulos, E3 presenta todas las figuras estereotipadas y E2 una gran mayoría no estereotipadas. También E1 presenta todos los rombos apoyados sobre uno de sus vértices a diferencia de las otras editoriales. En la categoría de distractores de orientación, E1 y E2 presentan los menores porcentajes de figuras estereotipadas y E3 los mayores porcentajes. Igualmente, los triángulos isósceles representados por E1 y E3 (parte teórica) tienen todos los lados iguales de mayor longitud que el desigual.

Estas conclusiones nos indican que no podemos decantarnos por una editorial como la idónea para la presentación de los conceptos geométricos, pues todas tienen ventajas y desventajas.

Consideramos que las deficiencias en los libros de textos pueden derivar en dificultades en el proceso de enseñanza-aprendizaje de la Geometría, sobre todo, si no se acompañan de otros recursos dedicados a contrarrestarlas. Algunos estudiantes muestran errores que no evolucionan ni son corregidos durante los distintos niveles educativos. Estos errores perduran en su formación académica y se detectan en su formación como maestros, lo que implica la transmisión a sus alumnos si no son corregidos (Contreras y Blanco, 2001). Por ello, es preciso que los docentes, antes de utilizar un libro de texto, realicen una exploración crítica de la visualización de la Geometría en los términos descritos en esta investigación. Esto puede permitir guiar a sus alumnos adecuadamente durante el proceso de enseñanza-aprendizaje.

En vista de los resultados del estudio, algunas actuaciones que consideramos oportunas, como recurso adicional al uso de los textos, serían los siguientes.

- ◆ Utilizar más representaciones distintas a las expuestas en los textos, procurando utilizar una variedad amplia de orientaciones y disponiendo los elementos de las figuras en distintas situaciones. Hay que intentar exponer casos particulares y especiales para enriquecer la definición personal del concepto que forman los alumnos sobre un concepto geométrico en el sentido de Tall y Vinner (1981).
- ◆ Realizar actividades manipulativas con diversos materiales, orientando su uso de forma que se expongan situaciones con posiciones y propiedades no estándar.
- ◆ Proponer actividades con software informático dedicado a la Geometría. Con estas herramientas dinámicas proporcionamos un entorno idóneo para explorar orientaciones, propiedades de objetos y situaciones geométricas.
- ◆ Exponer y realizar actividades con imágenes, fotografías y videos sobre elementos geométricos en la realidad, teniendo especial cuidado en la adecuación de estos como sustitutos de los elementos geométricos abstractos. Es importante tener en cuenta las ideas de Fischbein (1993) sobre las figuras geométricas en su doble naturaleza de caracteres figurales y conceptuales.
- ◆ Dedicar parte del tiempo de docencia de la materia a proporcionar a los alumnos las herramientas necesarias para introducir los sistemas de representación de figuras tridimensionales y desarrollar la visión espacial.

Los libros de texto son todavía un material de amplio uso en el panorama educativo actual, las nuevas tecnologías aplicadas a la educación están proporcionando las condiciones idóneas para el cambio de paradigma. En la actualidad, las nuevas tecnologías proporcionan múltiples recursos de aplicación a los procesos de enseñanza-aprendizaje. Los libros de texto digitales se vislumbran como sucesores de los libros de texto convencionales.

Consideramos que podría ser de interés extender este estudio a libros de texto digitales, con el objeto de comprobar si estos nuevos recursos corrigen las deficiencias de sus predecesores. Creemos que estos nuevos libros tienen capacidad para paliar todas las deficiencias que encontramos en los libros actuales en cuanto a la visualización de la Geometría se refiere. Para ello, es crucial que hagan uso de la interactividad y la dinámica para proporcionar a los alumnos y profesores entornos geométricos digitales manipulables. Por el contrario, si los libros digitales se transforman en una mera copia en formato digital de sus homólogos actuales, es muy probable que sigan arrastrando muchos elementos que interfieren de forma negativa en el proceso de enseñanza-aprendizaje.

REFERENCIAS

- Azcárate, C. (1997). Si el eje de ordenadas es vertical, ¿qué podemos decir de las alturas de un triángulo? *Suma*, 25, 23-30.
- Azcárate, P. y Serradó, A. (2006). Tendencias didácticas en los libros de texto de matemáticas para la ESO. *Revista de Educación*, 340, 341-378.
- Barrantes, M. y Zapata M. A. (2008). Obstáculos y errores en la enseñanza-aprendizaje de las figuras geométricas. *Campo Abierto*, 27(1), 55-71.

- Colera, J. y Gaztelu, I. (2011). *Matemáticas 1. Educación Secundaria*. Madrid, España: Grupo Anaya.
- Consejería de Educación y Cultura del Gobierno de Extremadura (2012). *Guía de Servicios Educativos de Extremadura 2012- 2013*. Mérida, España: Autor.
- Contreras, L. C. y Blanco, L. J. (2001). ¿Qué conocen los maestros sobre el contenido que enseñan? Un modelo formativo alternativo. *XXI Revista de Educación*, 3, 211-220.
- Dickson, L., Brown, M. y Gibson, O. (1991). *El aprendizaje de las Matemáticas*. Cerdanyola, España: Editorial Labor.
- Figueiras, L. y Deulofeu, J. (2005). Atribuir un significado a la matemática a través de la visualización. *Enseñanza de las Ciencias*, 23(2), 217-226.
- Fischbein, E. (1993). The theory of figural concepts. *Educational Studies in Mathematics*, 24(2), 139-162.
- García, P. y Pérez, C. (Eds.) (2007). *Matemáticas 1º ESO, Proyecto La Casa del Saber*. Madrid, España: Santillana Educación.
- González, M. y Sierra, M. (2004). Metodología de análisis de libros de texto de matemáticas: los puntos críticos en la enseñanza secundaria en España durante el siglo XX. *Enseñanza de las Ciencias*, 22(3), 389-408.
- Guillén, G., González, E. y García, M. A. (2009). Criterios específicos para analizar la geometría en libros de texto para la enseñanza primaria y secundaria obligatoria. Análisis desde los cuerpos de revolución. En M. J. González, M. T. González y J. Murillo (Eds.), *Investigación en Educación Matemática XIII* (pp. 247-258). Santander, España: Sociedad Española de Investigación en Educación Matemática.
- Gutiérrez, A. y Jaime, A. (1996). Uso de definiciones e imágenes de conceptos geométricos por los estudiantes de Magisterio. En J. Giménez, S. Llinares y M. V. Sánchez (Eds.), *El proceso de llegar a ser un profesor de primaria: cuestiones desde la Educación Matemática* (pp. 145-169). Granada, España: Comares.
- Llinares, S. (2008). Agendas de investigación en Educación Matemática en España. Una aproximación desde “ISI-web of knowledge” y ERIH. En R. Luengo, B. Gómez, M. Camacho y L. J. Blanco (Eds.), *Investigación en Educación Matemática XII* (pp. 25-54). Badajoz, España: Sociedad Española de Investigación en Educación Matemática.
- Miles, M. B. y Huberman, A. M. (1984). Draving valid meaning from qualitative data. Toward a shared craft. *Educational Researcher*, 13(5), 20-30.
- Monterrubio, M. C. (2007). *Modelos de valoración de manuales escolares de matemáticas* (Tesis doctoral no publicada). Universidad de Valladolid, España.
- Monterrubio, M. C. y Ortega, T. (2011). Diseño y aplicación de instrumentos de análisis y valoración de textos escolares de matemáticas. *PNA*, 5(3), 105-127.
- Moriena, S. y Scaglia, S. (2003). Efectos de las representaciones gráficas estereotipadas en la enseñanza de la geometría. *Educación Matemática*, 15(1), 5-19.
- Tall, D. y Vinner, S. (1981). Concept image and concept definition in mathematics with particular reference to limits and continuity. *Educational Studies in Mathematics*, 12, 151-169.
- Uriondo, J. L. (2007). *1º Secundaria Matemáticas, Serie Trama, Proyecto Ánfora*. Madrid, España: Oxford University Press España.
- Van Dormolen, J. (1986). Textual analysis. En B. Christiansen, A. G. Howson y M. Otte (Eds.), *Perspectives on mathematics education* (pp. 141-171). Dodrecht, Países Bajos: Reidel.

- Vinner, S. y Hershkowitz, R. (1983). On concept formation in geometry. *ZentralblattfürDidaktik der Mathematik*, 83(1), 20-25.
- Vizmanos, J. R., Anzola, M., Mansilla, S. y Bujanda, M. P. (2010). *Matemáticas 1º ESO, Pitágoras, Proyecto Conecta 2.0*. Madrid, España: SM.

Manuel Barrantes
Universidad de Extremadura
barrante@unex.es

Marco López
Universidad de Extremadura
marco_ta_c@hotmail.com

Manuel Ángel Fernández
Universidad de Extremadura
mafleno@unex.es